

# Modélisation théorique d'un réfractomètre laser à prisme

Frédéric Berthiaume

14 novembre 2017

## 1 Schémas

Le réfractomètre est constitué d'une source monochromatique hautement divergente (ici une diode laser sans aucune lentille), d'un prisme en verre et d'une photodiode comme détecteur qui permet de mesurer la hauteur du rayon critique. Un schéma général du système est présenté à la figure 1. Puisque la source est un point, la position du rayon critique lorsqu'il frappe l'hypoténuse du prisme varie selon l'indice de réfraction du milieu ( $x_1$  sur la figure 3). Cela complexifie donc un peu la résolution mathématique du problème. Afin de trouver l'indice de réfraction du milieu posé directement sur le prisme, on cherche à mesurer l'angle critique  $\theta_1$  qui va provoquer une différence de luminosité sur le détecteur. Le signal mesuré par le détecteur est donc une position verticale à un plan en  $x$  donné à la sortie du prisme. Il faut donc faire le tracé de rayons complet afin de trouver la relation entre ces deux variables. Finalement, on peut transformer l'angle critique en indice de réfraction avec la formule de Snell si l'on connaît l'indice de réfraction du prisme.

## 2 Fondements optiques

Réflexion :

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (1)$$

Loi de Snell :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

Angle critique :

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (3)$$

On a trois milieux : le prisme en verre BK-7 d'indice de réfraction  $n_1 \approx 1,5145$  à 650 nm, le milieu que l'on souhaite mesurer d'indice  $n_2$ , et l'air d'indice 1. L'indice de réfraction du milieu placé sur le prisme est toujours plus faible que celui-ci, ce qui fait qu'il y a toujours de la réflexion totale interne d'impliquée. L'astuce est de mesurer l'angle critique, autrement dit l'angle d'incidence dans le prisme pour lequel il y a une transition de la réfraction à la réflexion totale interne. Le système optique convertit cet angle en hauteur qui peut être mesuré plus facilement à l'aide d'une simple photodiode d'une surface donnée. En utilisant

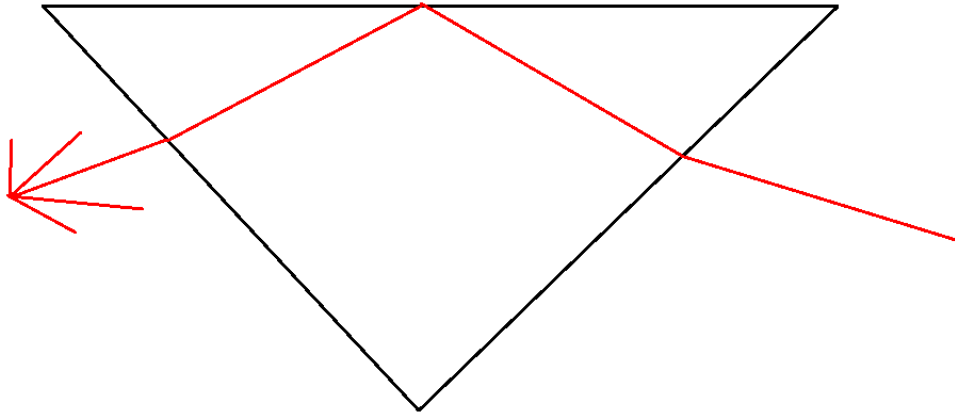


FIGURE 1 – Aperçu d'un tracé de rayon à travers le prisme

une source laser, qui est monochromatique, on s'assure d'avoir un seul angle critique puisqu'il n'y a pas de dispersion. De plus, une diode laser sans lentille est hautement divergente, donc elle produit un très large éventail d'angles d'entrée dans le prisme, ce qui enlève le besoin d'avoir de l'optique supplémentaire tout en étant extrêmement compact.

### 3 Analyse mathématique et géométrique

J'ai séparé l'analyse mathématique et géométrique en trois parties, afin de simplifier la modélisation : source, réflexion, sortie.

#### 3.1 Source

Cela commence avec la source (figure 2). Afin de ne pas trop se casser la tête avec la réfraction dans cette partie-là, j'ai décidé de calculer l'équivalence de la position de la source si elle était située dans le verre du prisme, autrement dit, si le prisme s'étendait à l'infini vers la gauche. Je suppose une source isotropique qui envoie tous les angles, donc je ne tiens pas compte de l'astigmatisme. C'est une approximation qui tient bien dans mon système puisque je suis intéressé par une plage assez petite d'angles d'entrée.

Avec une petite résolution géométrique, on trouve les valeurs de  $d$  et de  $l$  à la figure 2 :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \left( 135^\circ - \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \quad (4)$$

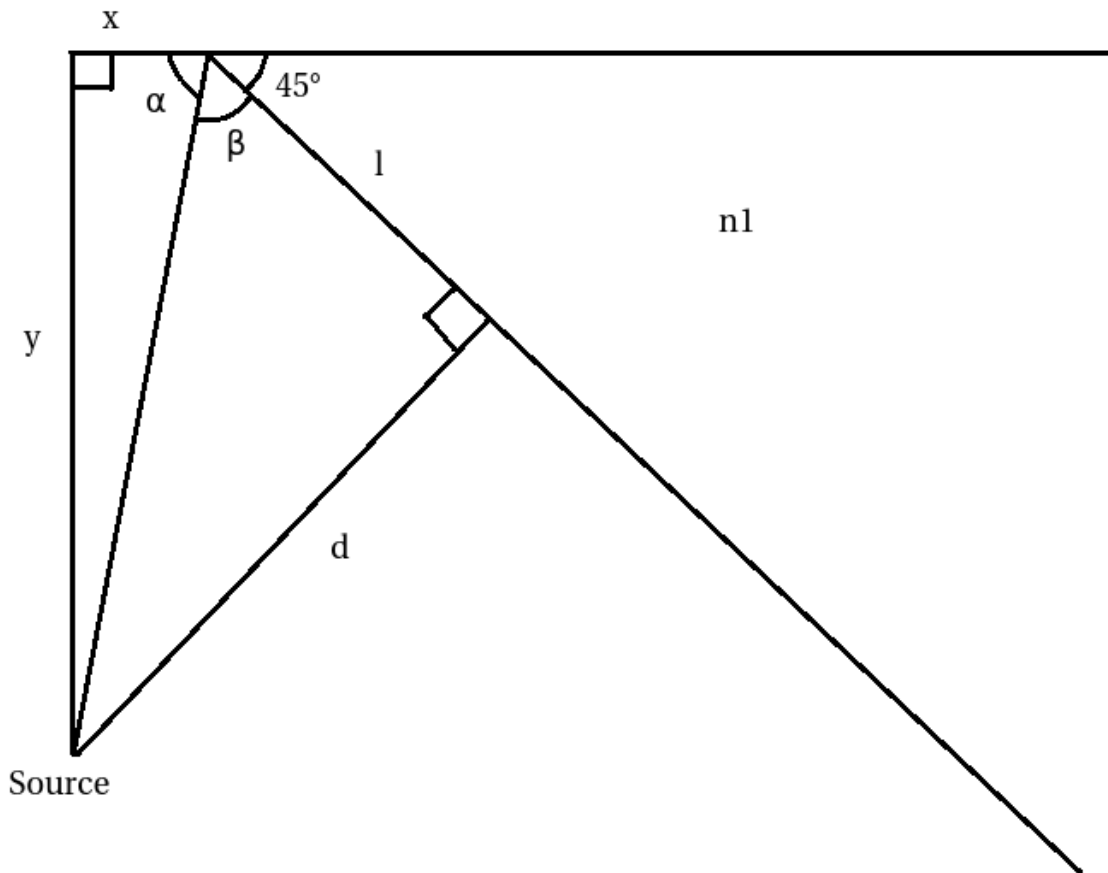


FIGURE 2 – Calcul de la position de la source

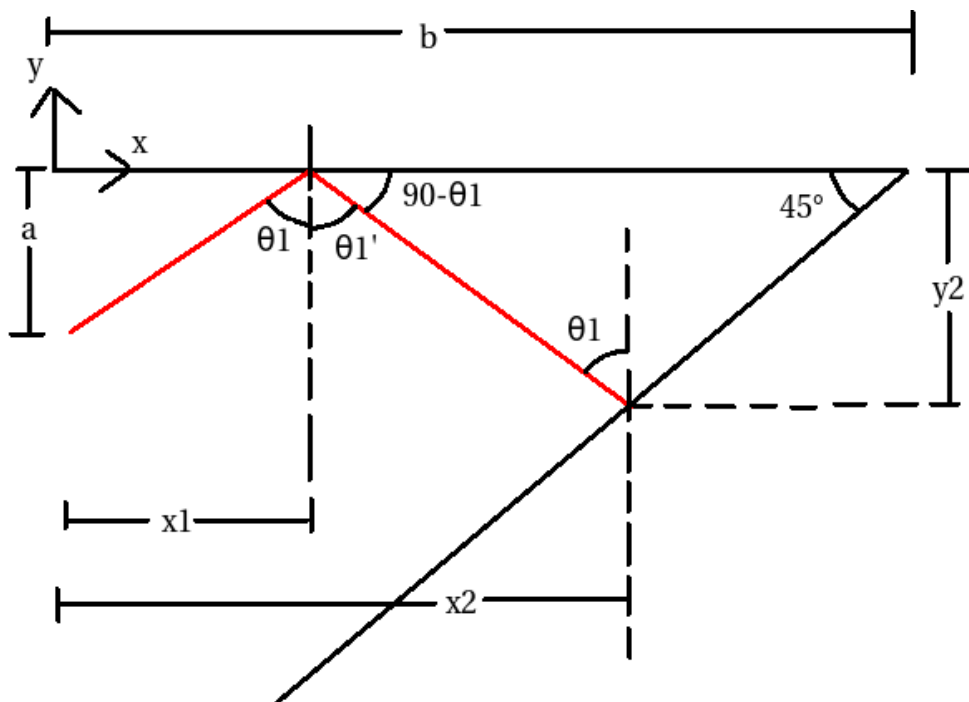


FIGURE 3 – Trajectoire du rayon critique à l'intérieur du prisme

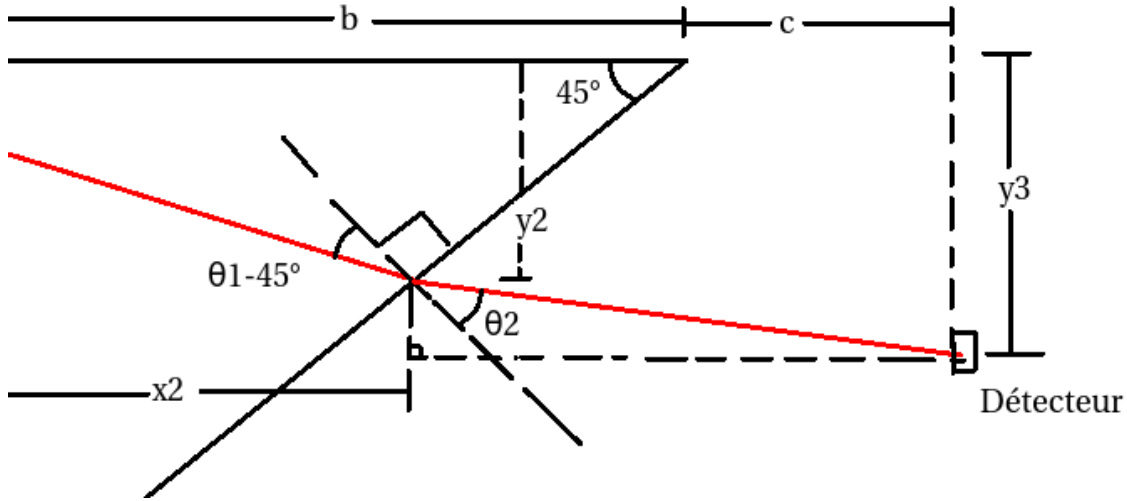


FIGURE 4 – Trajectoire du rayon critique entre le prisme et le détecteur

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \left( 135^\circ - \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \quad (5)$$

On modifie donc la distance  $d$  pour avoir une équivalence entre le parcours dans l'air et le parcours dans le verre :

$$d' = dn_1 \quad (6)$$

Et on peut ainsi retrouver les distances  $x'$  et  $y'$  :

$$x' = \sqrt{d'^2 + l^2} \cdot \cos \left( 135^\circ - \arctan \left( \frac{d'}{l} \right) \right) \quad (7)$$

$$y' = \sqrt{d'^2 + l^2} \cdot \sin \left( 135^\circ - \arctan \left( \frac{d'}{l} \right) \right) \quad (8)$$

Cela permet ainsi de calculer les paramètres  $a$  et  $b$  dans ma modélisation, qui est la position de la source par rapport au bout du prisme, dans le cas d'un prisme semi-infini. Dans ma construction réelle, cela donne  $a = -19,6$  mm et  $b = 59,6$  mm, selon mes mesures au vernier.

### 3.2 Réflexion

On commence par trouver  $x_1$  (voir figure 3), la position de la réflexion du rayon critique sur l'hypoténuse du prisme, avec :

$$\boxed{x_1 = -a \tan \theta_1} \quad (9)$$

La direction  $y$  est définie vers le haut, donc  $a$  est négatif, ce qui explique le signe dans l'équation pour avoir un tan dans le premier cadran.

On peut trouver ensuite un système de deux équations donnant la position de sortie du

faisceau du prisme  $x_2$  et  $y_2$  :

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{-y_2}{b - x_2} \Rightarrow \boxed{y_2 = x_2 - b} \quad (10)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{x_2 - x_1}{-y_2} \quad (11)$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$\boxed{x_2 = \frac{x_1 + b \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1}} \quad (12)$$

### 3.3 Sortie

L'angle de sortie est calculé avec la loi de Snell (figure 4) :

$$\boxed{\theta_2 = \arcsin(n_1 \sin(\theta_1 - 45^\circ))} \quad (13)$$

Pour trouver la hauteur  $y_3$ , on utilise le triangle tracé en pointillé à la figure 4 :

$$\tan(45^\circ + \theta_2) = \frac{b + c - x_2}{-y_3 + y_2} \quad (14)$$

Avec le signe pour se situer dans le premier cadran. En réarrangeant l'équation, on trouve :

$$\boxed{y_3 = y_2 - \frac{b + c - x_2}{\tan(45^\circ + \theta_2)}} \quad (15)$$

### 3.4 Vue d'ensemble

De fil en aiguille, on a maintenant toutes les équations contenant tous les paramètres pour déterminer la hauteur  $y_3$  à partir de l'angle critique  $\theta_1$ , qui donne directement l'indice de réfraction du milieu inconnu avec l'équation :

$$n_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad (16)$$

On doit donc spécifier dans le modèle les trois constantes,  $a$ ,  $b$  et  $c$ , qui sont des longueurs propres à la géométrie du réfractomètre (que j'exprime en millimètres dans ma résolution), ainsi que l'indice de réfraction du prisme.

Afin de créer ce modèle, j'ai dû utiliser une approche directe, or, ce que je souhaite, c'est l'inverse, soit obtenir l'angle critique à partir de la mesure de hauteur effectuée par ma photodiode. Pour ce faire, j'utilise une résolution numérique, puisque je n'ai aucune envie de me lancer dans la résolution analytique du modèle inverse, à supposer même qu'il y ait une solution de ce type.

## 4 Résolution numérique

J'ai écrit le code suivant sur Octave pour effectuer la résolution numérique :

```
a = -19.631; #defini negativement
b = 59.631;
c = 10;
theta1=0:0.01:pi/2; #angle critique, valeur qu'on veut trouver pour trouver n2
n1 = 1.5145; #indice du prisme @ 650nm (BK-7)

x1 = -a*tan(theta1);
x2 = (x1+b*tan(theta1))./(1+tan(theta1));
y2 = x2-b;
theta2 = asin(n1*sin(theta1-pi/4));
y3 = y2 -(b+c-x2)./tan(pi/4+theta2);
n2 = n1*sin(theta1);

[m,n] = size(n2);
for i=1:n
    if n2(i) < 1
        n2(i) = NaN;
        y3(i) = NaN;
    endif
endfor

plot(y3,n2);
```

Les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont calculées d'avance à partir de mes mesures. Le prisme est en BK-7, ce qui donne un indice de réfraction de 1,5145 (source). Un vecteur  $\theta_1$  contient toutes les valeurs possibles d'angles d'entrée, par la suite, toutes les hauteurs de sortie ainsi que les indices de réfraction correspondants sont calculées en utilisant les équations précédentes. Une boucle `for` permet de retirer les valeurs qui ont un indice de réfraction inférieur à 1, pour conserver la signification physique du modèle. Finalement, un graphique est tracé pour visualiser la solution (figure 5). On peut se servir des deux vecteurs de la solution comme d'une table donnant l'équivalence de l'indice de réfraction théorique selon la hauteur de sortie dans le plan situé à  $x = b + c$ .

## 5 Discussion

Il va de soi qu'en réalité, le système présente quelques défauts supplémentaires, comme des désalignements en angle et en position dans les 3 dimensions. Cependant, l'analyse théorique présentée dans ce rapport permet en premier lieu de bien comprendre le fonctionnement d'un réfractomètre à prisme, et en second lieu, de trouver des manières d'en

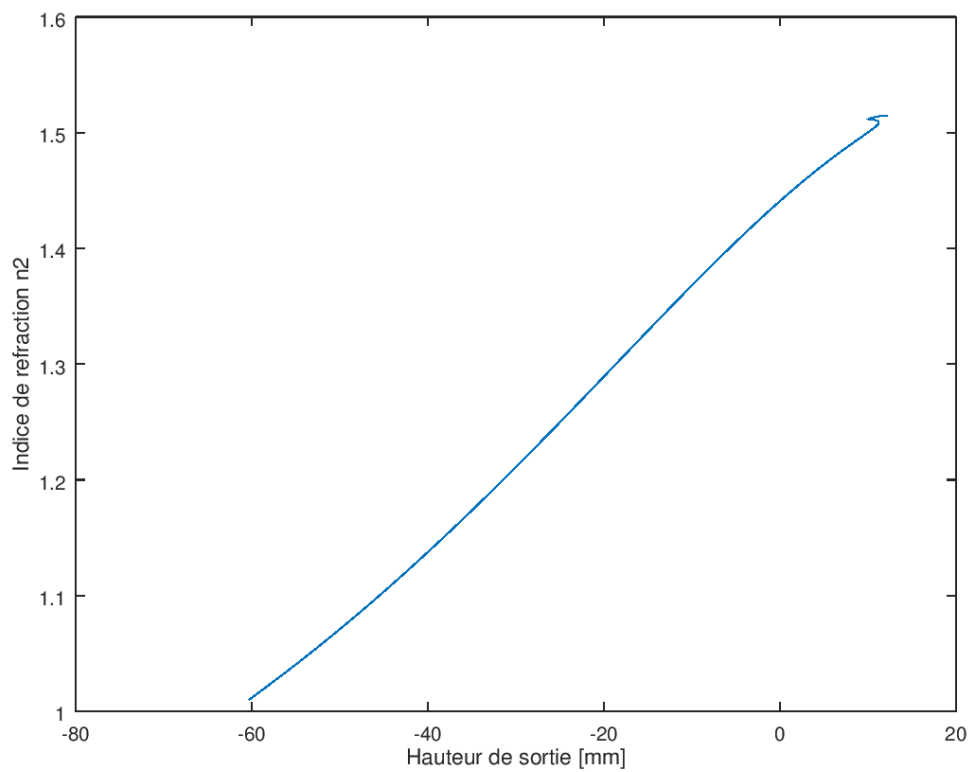


FIGURE 5 – Graphique obtenu par la résolution numérique : indice de réfraction de la substance placée sur l’hypoténuse du prisme selon la hauteur de la ligne définie par l’angle critique de réflexion totale interne telle que mesurée par la photodiode.

optimiser le design, notamment par des analyses de sensibilité.

La figure 5 présente la courbe théorique du signal à la sortie, dans un plan vertical. On peut remarquer la linéarité surprenante sur une plage très importante d'angles critiques (correspondant à toute la plage d'indice de réfraction possiblement mesurable), ainsi qu'une sensibilité vraiment intéressante (environ 0,0074 /mm). Le petit bout croché à la hauteur la plus élevée est probablement créé par le rayon incident qui dépasse le bord du prisme, donc le modèle mathématique n'est plus valide rendu là. Puisque la hauteur de la photodiode est d'environ 4 mm, on a un bon compromis entre la plage dynamique et la résolution de la mesure. En connaissant tous ces facteurs théoriques, il est dorénavant possible d'ajuster le design selon tous les besoins. On pourrait par exemple utiliser une photodiode plus petite avec un gain très élevé, parfaitement bien alignée, pour mesurer des petites variations de composition chimique de l'eau. Ou bien, pour déterminer la concentration d'un contaminant, y aller avec une photodiode plus haute et avec un gain plus faible afin de couvrir l'ensemble de la plage dynamique.

La hauteur théorique avec toutes les mesures de mon système réel semble être un peu plus faible que la hauteur réelle du faisceau : par exemple, pour l'eau, je constate une mesure d'environ  $-26$  mm, alors que sur le graphique, cela donne environ  $-15$  mm. C'est quand même une différence significative, il faudrait investiguer davantage sur la cause de cet écart. J'ai plusieurs hypothèses, la plus extrême étant qu'il subsiste une erreur dans mon modèle, puisque des petites variations dans les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne semblent pas provoquer un changement aussi significatif dans l'écart. Il pourrait s'agir plus vraisemblablement d'un désalignement dans la troisième dimension, étant donné que tout est ultimement fixé avec la colle chaude. L'important étant que la courbe théorique soit en première approximation linéaire, ce qui permet de mieux appréhender le signal obtenu par la photodiode. Ce qu'il va être intéressant, cela va être de comparer la pente théorique à des essais expérimentaux impliquant plusieurs concentrations d'un contaminant dans l'eau.

En pratique, la ligne de la réflexion totale interne n'a pas un contraste infini, ce qui rajoute essentiellement du bruit dans la mesure (puisque la partie « sombre » n'est pas tout à fait sombre. Il faudrait utiliser la photodiode dans un mode de saturation binaire, autrement dit, il faudrait être en mesure d'avoir un signal lumineux juste assez bien ajusté pour que la partie sombre ne laisse passer aucun courant, tandis que la partie lumineuse serait hautement conductrice, pour obtenir le meilleur ratio possible de la hauteur. Il faudrait peut-être utiliser une autre sorte de capteur, plus compliqué qu'une simple photodiode, afin d'obtenir le maximum de sensibilité avec cette technique.

L'avantage principal de ma méthode est qu'elle n'implique pas de partie mobile ou de mécanisme (excepté la lame de verre servant de couvercle et de beam dump), qu'elle est somme toute plutôt compacte et pourrait être aisément miniaturisée jusqu'à prendre quelques centimètres d'espace, fonctionner avec une simple goutte, etc. On pourrait rapidement s'en servir comme appareil portable et versatile dans une foule de domaines nécessitant une analyse chimique rudimentaire, mais instantanée et très précise.